

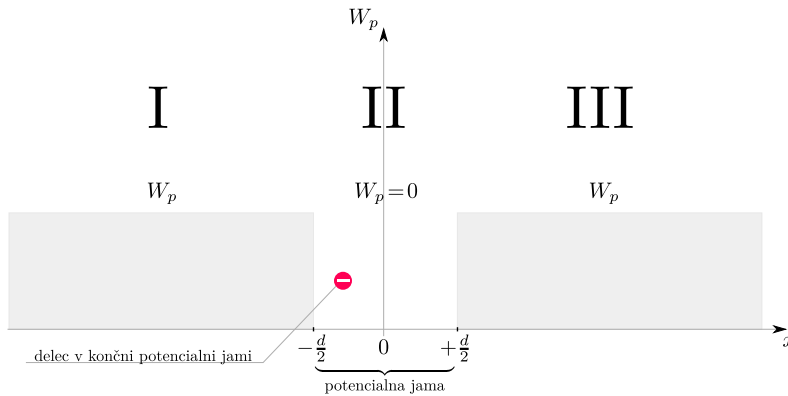
5.7.3 Načelo nedoločenosti v neskončni potencialni jami

Preiskusimo, ali načelo nedoločenosti (4.16) velja tudi v primeru potencialne jame, ko $N = 1, 2, 3$. Za preiskus uporabimo nedoločenost lege Δx (5.40) in nedoločenost gibalne količine Δp (5.43) za delec v potencialni jami.

$$\begin{aligned}\Delta p \Delta x &\geq \frac{\hbar}{2} \\ \frac{\hbar \pi}{d} N \cdot d \sqrt{\frac{1}{12} - \frac{1}{2N^2 \pi^2}} &\geq \frac{\hbar}{2} \\ \sqrt{\hbar^2 \pi^2 N^2 \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{2N^2 \pi^2} \right)} &\geq \frac{\hbar}{2} \\ \sqrt{\hbar^2 \left(\frac{\pi^2 N^2}{12} - \frac{1}{2} \right)} &\geq \frac{\hbar}{2} \\ \sqrt{\frac{\hbar^2}{4} \left(\frac{\pi^2 N^2}{3} - 2 \right)} &\geq \frac{\hbar}{2} \\ \frac{\hbar}{2} \sqrt{\frac{\pi^2 N^2}{3} - 2} &\geq \frac{\hbar}{2} \quad \checkmark \\ \text{pri } N=1 \text{ enako } 1, 13 \\ \text{pri } N=2 \text{ enako } 3, 34 \\ \text{pri } N=3 \text{ enako } 5, 25\end{aligned}$$

5.8 Delec v končni potencialni jami

Pri končni potencialni jami ločeno obravnavamo intervale I, II in III, slika 5.5.



Slika 5.5: Delec v končni potencialni jami.

5.8.1 Intervala I in III

Zapišimo stacionarno Schrödingerjevo enačbo (5.3) za intervala I in III, kjer imamo potencial W_p . V kolikor definiramo novo konstanto \mathcal{K} , lažje opazimo, da imamo linearno DE drugega reda (5.44) za katero poznamo splošno rešitev.

$$\begin{aligned}W\psi &= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + W_p \psi \\ \frac{d^2\psi}{dx^2} &= -\frac{2m}{\hbar^2} (W - W_p) \psi \\ \text{DE: } \frac{d^2\psi}{dx^2} &= \mathcal{K}^2 \psi \quad \mathcal{K} \equiv \sqrt{-\frac{2m(W - W_p)}{\hbar^2}} \\ &\Downarrow \\ \text{splošna rešitev DE: } \psi &= Ae^{\mathcal{K}x} + Be^{-\mathcal{K}x}\end{aligned} \quad (5.44)$$

DE (5.44) je drugačna od DE (5.31). Zgolj drugačen predznak pred konstanto prispeva k popolnoma drugačni splošni rešitvi.

Delec je ujet, ker velja:

$$W < W_p$$

Zaradi tega mora definicija konstante \mathcal{K} vključevati tudi predznak "-". V nasprotnem primeru bi dobili koren negativnega števila.

Na intervalu I je x lahko tudi $-\infty$. V tem primeru en izmed členov v splošni rešitvi DE (5.44) postane ∞ , medtem ko se drugi približa 0:

$$\begin{aligned} 1. \text{ člen: } Ae^{\mathcal{K}(-\infty)} &\longrightarrow 0 \quad \checkmark \\ 2. \text{ člen: } Be^{-\mathcal{K}(-\infty)} &\longrightarrow \infty \quad \times \end{aligned}$$

Zaradi neskončnega člena ψ in $|\psi|^2$ postaneta neskončna, kar ni sprejemljivo - v tem primeru ni mogoče zadostiti normalizacijskemu integralu (4.8). Zato postavimo:

$$B = 0$$

Dobimo valovno funkcijo ψ_I za interval I, ki velja tudi ko $x \rightarrow -\infty$ (5.45).

$$\psi_I = Ae^{\mathcal{K}x} \quad (5.45)$$

(5.45) je še vedno splošna rešitev DE, vendar za interval I. Potrebno je najti še konstanto A .

Na intervalu III je x lahko tudi ∞ . V tem primeru en izmed členov v splošni rešitvi DE (5.44) postane ∞ , medtem ko se drugi približa 0:

$$\begin{aligned} 1. \text{ člen: } Ae^{\mathcal{K}(\infty)} &\longrightarrow \infty \quad \times \\ 2. \text{ člen: } Be^{-\mathcal{K}(\infty)} &\longrightarrow 0 \quad \checkmark \end{aligned}$$

Zaradi neskončnega člena ψ in $|\psi|^2$ postaneta neskončna, kar ni sprejemljivo - v tem primeru ni mogoče zadostiti normalizacijskemu integralu (4.8). Zato postavimo:

$$A = 0$$

Dobimo valovno funkcijo ψ_{III} za interval III, ki velja tudi ko $x \rightarrow \infty$ (5.46).

$$\psi_{III} = Be^{-\mathcal{K}x} \quad (5.46)$$

(5.46) je še vedno splošna rešitev DE, vendar za interval III. Potrebno je najti še konstanto B .

5.8.2 Interval II

Zapišimo sedaj še stacionarno Schrödingerjevo enačbo (5.3) za interval II, kjer velja $W_p = 0$. Na tem intervalu dobimo linearno DE drugega reda (5.47), ki je enaka kot v primeru neskončne potencialne jame (5.31) in katere splošno rešitev ψ_{II} že poznamo. Zaradi lažjega računanja tokrat definiramo \mathcal{L} .

$$\begin{aligned} W\psi &= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + W_p\psi \\ W\psi &= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} \\ \frac{d^2\psi}{dx^2} &= -\frac{2mW}{\hbar^2} \psi \\ \text{DE: } \frac{d^2\psi}{dx^2} &= -\mathcal{L}^2 \psi \quad \mathcal{L} \equiv \sqrt{\frac{2mW}{\hbar^2}} \end{aligned} \quad (5.47)$$

$$\Downarrow$$

$$\text{splošna rešitev DE: } \psi_{II} = C \sin(\mathcal{L}x) + D \cos(\mathcal{L}x)$$

Konstant C in D še ne poznamo, vendar bosta drugačni kot konstanti A in B v primeru (5.31).

DE (5.47) je drugačna od DE (5.44). Zgolj drugačen predznak pred konstanto prispeva k popolnoma drugačni splošni rešitvi!

Ker velja:

$$W > 0$$

konstanto \mathcal{L} definiramo brez predznaka "-". V nasprotnem primeru bi dobili koren negativnega števila.

5.8.3 Robna pogoja

Vse enačbe v tem poglavju izhajajo iz stacionarne Schrödingerjeve enačbe, ki je DE *drugega* reda in ima zato *dva* "Cauchijeva" robna pogoja. Prvi robni pogoj zahteva, da je ψ zvezna v vseh točkah³⁶, medtem ko drugi robni pogoj zahteva, da je ψ v vseh točkah zvezno odvedljiva³⁷. Ker robna pogoja veljata na celotni funkciji, veljata tudi na prehodu med intervaloma I-II in prehodu med intervaloma II-III. Prehoda obravnavamo ločeno.

³⁶Zveznost pomeni, da ima funkcija v katerem koli x le eno vrednost.

³⁷Zvezna odvedljivost pomeni, da ima funkcija v katerem koli x le en naklon.

I-II:

$$\begin{aligned}
\psi_I\left(-\frac{d}{2}\right) &= \psi_{II}\left(-\frac{d}{2}\right) \\
\frac{d}{dx}\psi_I\left(-\frac{d}{2}\right) &= \frac{d}{dx}\psi_{II}\left(-\frac{d}{2}\right) \\
&\Downarrow \\
Ae^{-\kappa\frac{d}{2}} &= -C\sin\left(\mathcal{L}\frac{d}{2}\right) + D\cos\left(\mathcal{L}\frac{d}{2}\right) \\
\kappa Ae^{-\kappa\frac{d}{2}} &= \mathcal{L}C\cos\left(\mathcal{L}\frac{d}{2}\right) + \mathcal{L}D\sin\left(\mathcal{L}\frac{d}{2}\right) \\
&\Downarrow \text{ delimo} \\
\frac{\kappa}{\mathcal{L}} &= \frac{C\cos\left(\mathcal{L}\frac{d}{2}\right) + D\sin\left(\mathcal{L}\frac{d}{2}\right)}{-C\sin\left(\mathcal{L}\frac{d}{2}\right) + D\cos\left(\mathcal{L}\frac{d}{2}\right)}
\end{aligned}$$

II-III:

$$\begin{aligned}
\psi_{II}\left(\frac{d}{2}\right) &= \psi_{III}\left(\frac{d}{2}\right) \\
\frac{d}{dx}\psi_{II}\left(\frac{d}{2}\right) &= \frac{d}{dx}\psi_{III}\left(\frac{d}{2}\right) \\
&\Downarrow \\
Be^{-\kappa\frac{d}{2}} &= C\sin\left(\mathcal{L}\frac{d}{2}\right) + D\cos\left(\mathcal{L}\frac{d}{2}\right) \\
-\kappa Be^{-\kappa\frac{d}{2}} &= \mathcal{L}C\cos\left(\mathcal{L}\frac{d}{2}\right) - \mathcal{L}D\sin\left(\mathcal{L}\frac{d}{2}\right) \\
&\Downarrow \text{ delimo} \\
\frac{\kappa}{\mathcal{L}} &= \frac{-C\cos\left(\mathcal{L}\frac{d}{2}\right) + D\sin\left(\mathcal{L}\frac{d}{2}\right)}{C\sin\left(\mathcal{L}\frac{d}{2}\right) + D\cos\left(\mathcal{L}\frac{d}{2}\right)}
\end{aligned}$$

Vemo, da je kosinusna funkcija soda in sinusna funkcija liha:

$$\begin{aligned}
\cos(-\alpha) &= \cos \alpha \\
\sin(-\alpha) &= -\sin \alpha
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{C\cos\left(\mathcal{L}\frac{d}{2}\right) + D\sin\left(\mathcal{L}\frac{d}{2}\right)}{-C\sin\left(\mathcal{L}\frac{d}{2}\right) + D\cos\left(\mathcal{L}\frac{d}{2}\right)} &= \frac{-C\cos\left(\mathcal{L}\frac{d}{2}\right) + D\sin\left(\mathcal{L}\frac{d}{2}\right)}{C\sin\left(\mathcal{L}\frac{d}{2}\right) + D\cos\left(\mathcal{L}\frac{d}{2}\right)} \\
\frac{C + D\tan\left(\mathcal{L}\frac{d}{2}\right)}{-C\tan\left(\mathcal{L}\frac{d}{2}\right) + D} &= \frac{-C + D\tan\left(\mathcal{L}\frac{d}{2}\right)}{C\tan\left(\mathcal{L}\frac{d}{2}\right) + D} \\
\left\{C + D\tan\left(\mathcal{L}\frac{d}{2}\right)\right\}\left\{C\tan\left(\mathcal{L}\frac{d}{2}\right) + D\right\} &= \left\{-C\tan\left(\mathcal{L}\frac{d}{2}\right) + D\right\}\left\{-C + D\tan\left(\mathcal{L}\frac{d}{2}\right)\right\} \\
C^2\tan\left(\mathcal{L}\frac{d}{2}\right) + CD\tan^2\left(\mathcal{L}\frac{d}{2}\right) + CD + D^2\tan\left(\mathcal{L}\frac{d}{2}\right) &= C^2\tan\left(\mathcal{L}\frac{d}{2}\right) - CD - CD\tan^2\left(\mathcal{L}\frac{d}{2}\right) + D^2\tan\left(\mathcal{L}\frac{d}{2}\right) \\
CD\tan^2\left(\mathcal{L}\frac{d}{2}\right) + CD &= -CD - CD\tan^2\left(\mathcal{L}\frac{d}{2}\right) \\
CD\left(1 + \tan^2\left(\mathcal{L}\frac{d}{2}\right)\right) &= -CD\left(1 + \tan^2\left(\mathcal{L}\frac{d}{2}\right)\right) \\
\boxed{CD = -CD} & \quad (5.48)
\end{aligned}$$

Dobili smo dokaj nenavaden rezultat (5.48), ki je lahko izpolnjen le v kolikor velja $C = 0$ ali $D = 0$ vendar nikoli oba hkrati - to bi pomenilo, da imamo trivialno rešitev $\psi = 0$ in delca v jami sploh ni.

Izboljšane splošne rešitve - sode

V kolikor upoštevamo $C = 0$ in zapišemo robni pogoj za zveznost funkcije ψ , ugotovimo, da sta konstanti A in B enaki $A = B$, medtem ko konstanto D lahko izrazimo s pomočjo konstante A . S pomočjo teh spoznanj zapišemo izboljšane splošne rešitve za ψ_I , ψ_{II} in ψ_{III} (5.49). Opazimo, da v ψ_{II} nastopa kosinusna funkcija. Slednja je *soda*³⁸ zaradi česar rešitve tega sklopa imenujemo *sode rešitve*.

I-II:

$$\begin{aligned}
\psi_I\left(-\frac{d}{2}\right) &= \psi_{II}\left(-\frac{d}{2}\right) \\
Ae^{-\kappa\frac{d}{2}} &= D\cos\left(\mathcal{L}\frac{d}{2}\right)
\end{aligned}$$

II-III:

$$\begin{aligned}
\psi_{II}\left(\frac{d}{2}\right) &= \psi_{III}\left(\frac{d}{2}\right) \\
Be^{-\kappa\frac{d}{2}} &= D\cos\left(\mathcal{L}\frac{d}{2}\right)
\end{aligned}$$

$$A = B \quad D = \frac{Ae^{-\kappa\frac{d}{2}}}{\cos\left(\mathcal{L}\frac{d}{2}\right)}$$

$$\psi_I = Ae^{\kappa x} \quad \psi_{II} = \frac{Ae^{-\kappa\frac{d}{2}}}{\cos\left(\mathcal{L}\frac{d}{2}\right)} \cos(\mathcal{L}x) \quad \psi_{III} = Ae^{-\kappa x} \quad (5.49)$$

izboljšane splošne rešitve za ψ_I , ψ_{II} in ψ_{III} - sode

³⁸Za sode funkcije velja $g(-x) = g(x)$.

V kolikor na (5.49) uporabimo pogoj za zvezno odvedljivost, v primeru obeh prehodov I-II in II-III dobimo *transcendentno enačbo za sode rešitve* (5.50). Slednjo lahko rešimo grafično tako, da narišemo najprej graf leve strani enačbe in nato graf desne strani enačbe, slika 5.6. Presečišča predstavljajo rešitev enačbe oz. dovoljene energije W za delec v končni potencialni jami.

I-II:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\psi_I\left(-\frac{d}{2}\right) &= \frac{d}{dx}\psi_{II}\left(-\frac{d}{2}\right) \\ \mathcal{K}Ae^{-\mathcal{K}\frac{d}{2}} &= \frac{Ae^{-\mathcal{K}\frac{d}{2}}}{\cos\left(\mathcal{L}\frac{d}{2}\right)}\mathcal{L}\sin\left(\mathcal{L}\frac{d}{2}\right) \\ \frac{\mathcal{K}}{\mathcal{L}} &= \tan\left(\mathcal{L}\frac{d}{2}\right)\end{aligned}$$

II-III:

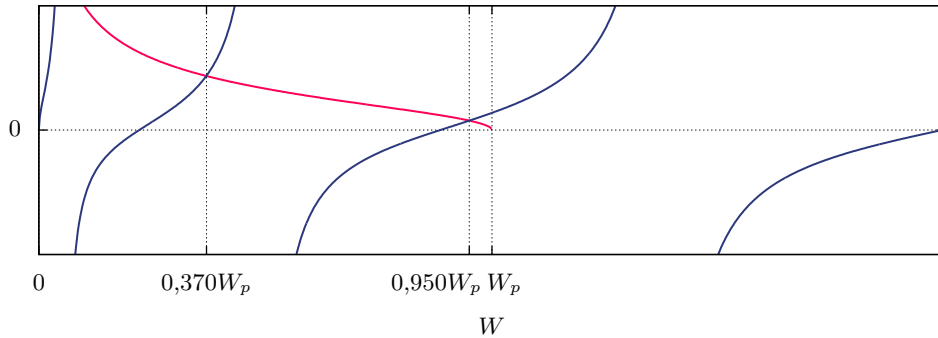
$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\psi_{II}\left(\frac{d}{2}\right) &= \frac{d}{dx}\psi_{III}\left(\frac{d}{2}\right) \\ -\frac{Ae^{-\mathcal{K}\frac{d}{2}}}{\cos\left(\mathcal{L}\frac{d}{2}\right)}\mathcal{L}\sin\left(\mathcal{L}\frac{d}{2}\right) &= -\mathcal{K}Ae^{-\mathcal{K}\frac{d}{2}} \\ \frac{\mathcal{K}}{\mathcal{L}} &= \tan\left(\mathcal{L}\frac{d}{2}\right)\end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{\mathcal{K}}{\mathcal{L}} = \tan\left(\mathcal{L}\frac{d}{2}\right)} \xrightarrow{\text{vstavimo } \mathcal{K} \text{ in } \mathcal{L}} \boxed{\sqrt{\frac{W_p}{W} - 1} = \tan\left(\frac{\sqrt{2mW}}{\hbar}\frac{d}{2}\right)} \quad (5.50)$$

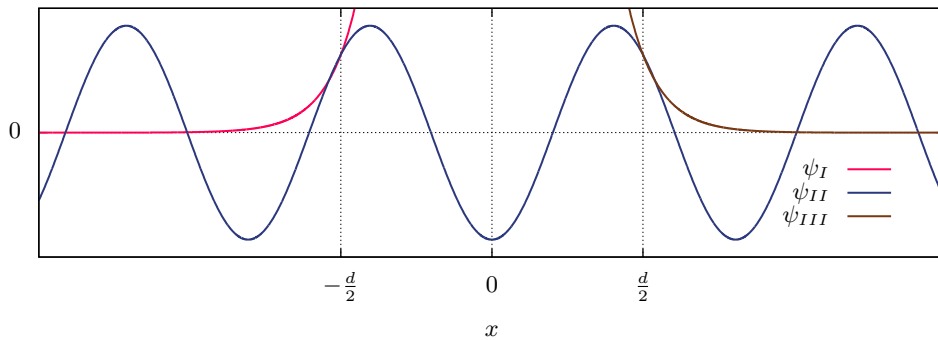
transcendentna enačba za sode rešitve

Graf transcendentne enačbe za sode rešitve (5.50), slika 5.6, je narisana za primer elektrona z maso m_e , stran 47, ki se nahaja v potencialni jami premera $d = 1nm$. Potencialna jama ima na intervalih I in III potencial $W_p = 25eV$. Iz grafa razberemo eno izmed dveh možnih "sodih" energij $W = 0,370W_p$, zanjo izračunamo konstanti \mathcal{L} in \mathcal{K} ter narišemo valovno funkcijo ψ , slika 5.7, kjer predpostavimo $A = 1$. To pomeni, da narisana valovna funkcija ψ ni normalizirana, vendar zgolj za predstavbo to niti ni potrebno. Ker A ostane neizračunan rešitvam rečemo splošne rešitve.

Opazimo, da se valovna funkcija ψ , slika 5.7 s tem pa tudi delec, nahaja izven vodnjaka. Tak pojav je značilen le za kvantno mehaniko in ga v klasični mehaniki ni moč zaslediti.



Slika 5.6: Grafična rešitev transcendentne enačbe za sode rešitve, kjer presečišča predstavljajo dovoljene energije W v končni potencialni jami.



Slika 5.7: Sode rešitve za ψ delca v končni potencialni jami sestavljene iz ψ_I , ψ_{II} in ψ_{III} .

Izboljšane splošne rešitve - lihe

V kolikor upoštevamo $D=0$ in zapišemo robni pogoj za zveznost funkcije ψ , ugotovimo, da sta konstanti A in B nasprotno enaki $A = -B$, medtem ko konstanto C lahko izrazimo s pomočjo konstante A . S pomočjo teh spoznanj zapišemo izboljšane splošne rešitve za ψ_I , ψ_{II} in ψ_{III} (5.51). Opazimo, da v ψ_{II} nastopa sinusna funkcija. Slednja je *liha*³⁹ zaradi česar rešitve tega sklopa imenujemo *lihe rešitve*.

I-II:

$$\begin{aligned}\psi_I\left(-\frac{d}{2}\right) &= \psi_{II}\left(-\frac{d}{2}\right) \\ Ae^{-\kappa\frac{d}{2}} &= -C \sin\left(\mathcal{L}\frac{d}{2}\right)\end{aligned}$$

II-III:

$$\begin{aligned}\psi_{II}\left(\frac{d}{2}\right) &= \psi_{III}\left(\frac{d}{2}\right) \\ C \sin\left(\mathcal{L}\frac{d}{2}\right) &= Be^{-\kappa\frac{d}{2}}\end{aligned}$$

$$A = -B \quad C = -\frac{Ae^{-\kappa\frac{d}{2}}}{\sin\left(\mathcal{L}\frac{d}{2}\right)}$$

$$\psi_I = Ae^{\kappa x} \quad \psi_{II} = -\frac{Ae^{-\kappa\frac{d}{2}}}{\sin\left(\mathcal{L}\frac{d}{2}\right)} \sin(\mathcal{L}x) \quad \psi_{III} = -Ae^{-\kappa x} \quad (5.51)$$

izboljšane splošne rešitve za ψ_I , ψ_{II} in ψ_{III} - lihe

V kolikor na (5.51) uporabimo pogoj za zvezno odvedljivost, v primeru obeh prehodov I-II in II-III dobimo *transcendentno enačbo za lihe rešitve* (5.52). Slednjo lahko rešimo grafično tako, da narišemo najprej graf leve strani enačbe in nato graf desne strani enačbe, slika 5.8. Presečišča predstavljajo rešitev enačbe oz. dovoljene energije W za delec v končni potencialni jami.

Opazimo, da so dovoljene energije W drugačne v primeru lihih, slika 5.8, in sodih, slika 5.6.

I-II:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\psi_I\left(-\frac{d}{2}\right) &= \frac{d}{dx}\psi_{II}\left(-\frac{d}{2}\right) \\ \kappa Ae^{-\kappa\frac{d}{2}} &= -\frac{Ae^{-\kappa\frac{d}{2}}}{\sin\left(\mathcal{L}\frac{d}{2}\right)} \mathcal{L} \cos\left(\mathcal{L}\frac{d}{2}\right) \\ -\frac{\mathcal{L}}{\kappa} &= \tan\left(\mathcal{L}\frac{d}{2}\right)\end{aligned}$$

II-III:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\psi_{II}\left(\frac{d}{2}\right) &= \frac{d}{dx}\psi_{III}\left(\frac{d}{2}\right) \\ -\frac{Ae^{-\kappa\frac{d}{2}}}{\sin\left(\mathcal{L}\frac{d}{2}\right)} \mathcal{L} \cos\left(\mathcal{L}\frac{d}{2}\right) &= \kappa Ae^{-\kappa\frac{d}{2}} \\ -\frac{\mathcal{L}}{\kappa} &= \tan\left(\mathcal{L}\frac{d}{2}\right)\end{aligned}$$

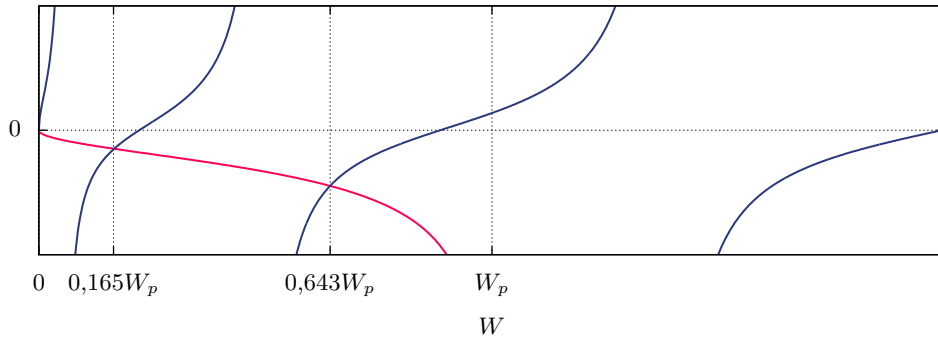
$$-\frac{\mathcal{L}}{\kappa} = \tan\left(\mathcal{L}\frac{d}{2}\right) \xrightarrow{\text{vstavimo } \kappa \text{ in } \mathcal{L}} -\sqrt{\frac{1}{W_p/W-1}} = \tan\left(\frac{\sqrt{2mW}}{\hbar}\frac{d}{2}\right) \quad (5.52)$$

transcendentna enačba za lihe rešitve

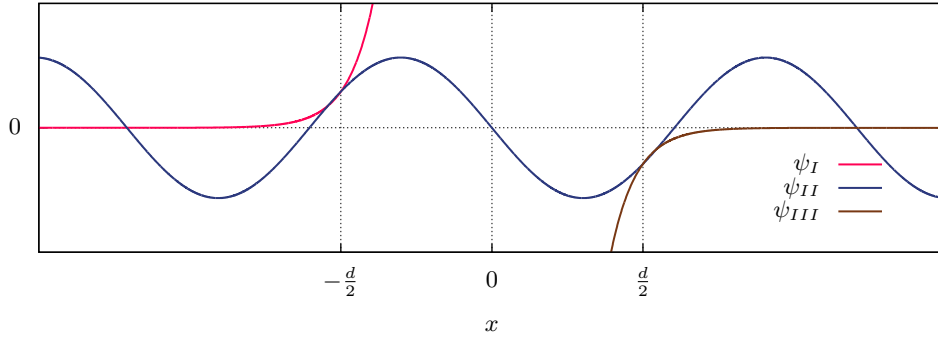
Graf transcendentne enačbe za sode rešitve (5.52), slika 5.8, je narisana za primer elektrona z maso m_e , stran 47, ki se nahaja v potencialni jami premera $d = 1nm$. Potencialna jama ima na intervalih I in III potencial $W_p = 25eV$. Iz grafa razberemo eno izmed dveh možnih "lihih" energij $W = 0,165 W_p$, zanjo izračunamo konstanti \mathcal{L} in κ ter narišemo valovno funkcijo ψ , slika 5.9, kjer predpostavimo $A = 1$. To pomeni, da narisana valovna funkcija ψ ni normalizirana, vendar zgolj za predstavo to niti ni potrebno. Ker A ostane neizračunan rešitvam rečemo splošne rešitve.

Opazimo, da se valovna funkcija ψ , slika 5.9 s tem pa tudi delec, nahaja izven vodnjaka. Tak pojav je značilen le za kvantno mehaniko in ga v klasični mehaniki ni moč zaslediti.

³⁹Za lihe funkcije velja $g(-x) = -g(x)$.



Slika 5.8: Grafična rešitev transcendentne enačbe za lihe rešitve, kjer presečišča predstavljajo dovoljene energije W v končni potencialni jami.



Slika 5.9: Lihe rešitve za ψ delca v končni potencialni jami sestavljene iz ψ_I , ψ_{II} in ψ_{III} .

5.8.4 Energije v končni potencialni jami

Ko iz transcendentnih enačb za sode (5.50) in lihe (5.52) rešitve razberemo dovoljene energije W , slednje uporabimo za izračun konstante \mathcal{L} (5.47). W nato izrazimo s pomočjo \mathcal{L} (5.53). V kolikor poznamo W_p lahko s pomočjo energij W izračunamo tudi konstanto \mathcal{K} (5.44). Izpeljimo povezavo med konstantama \mathcal{K} in \mathcal{L} (5.55). V kolikor slednjo vstavimo v (5.53) dobimo drugi izraz za energijo W (5.56).

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &\equiv \sqrt{\frac{2mW}{\hbar^2}} \\ \mathcal{L}^2 &= \frac{2mW}{\hbar^2} \\ W &= \frac{\mathcal{L}^2 \hbar^2}{2m} \\ \Downarrow \\ W &= W_p - \frac{\mathcal{K}^2 \hbar^2}{2m}\end{aligned}\quad (5.53)$$

$$W = W_p - \frac{\mathcal{K}^2 \hbar^2}{2m} \quad (5.54)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{K} &\equiv \sqrt{-\frac{2m(W-W_p)}{\hbar^2}} \\ \mathcal{K}^2 &= \frac{2m(W_p - W)}{\hbar^2} \\ \mathcal{K}^2 &= \frac{2mW_p}{\hbar^2} - \frac{2mW}{\hbar^2} \\ \mathcal{K}^2 &= \frac{2mW_p}{\hbar^2} - \mathcal{L}^2 \\ \mathcal{L}^2 &= \frac{2mW_p}{\hbar^2} - \mathcal{K}^2\end{aligned}\quad (5.55)$$

V kolikor si podrobneje ogledamo transcendentno enačbo za sode (5.50) ali lihe (5.52) rešitve opazimo, da oba vsebujeta tangensni člen, ki se ponovi vsakih $N\pi$ iz česar lahko izračunamo število N neke energije W (5.56). Energija W je lahko največ W_p zaradi česar nam zamenjava $W \longleftrightarrow W_p$ vrne število vseh možnih stanj v neskončni potencialni jami N_{max} (5.57).

$$\begin{aligned}N\pi &= \frac{\sqrt{2mW}}{\hbar} \frac{d}{2} \\ N &= \frac{\sqrt{2mW}}{\pi \hbar} \frac{d}{2}\end{aligned}\quad (5.56)$$

$$N_{max} \approx \frac{\sqrt{2mW_p}}{\pi \hbar} \frac{d}{2} \quad (5.57)$$

Za N_{max} uporabimo " \approx ", ker ob zamenjavi $W \leftrightarrow W_p$ ne bomo dobili celega števila. Vrednost dobljeno z (5.57) moramo zaokrožiti navzdol in za N_{max} upoštevati prvo nižje celo število.