Эти соображения приводят вместе с тем к общему утверждению: *нтегралы типа* (4) *всегда берутся в конечном виде, причем для предтавления их, кроме функций, через которые выражаются интегралы т рациональных дифференциалов, нужны еще лишь квадратные корни.*

282. Геометрическая трактовка эйлеровых подстановок. Эйлеровы одстановки, кажущиеся столь искусственными, могут быть все поучены из наглядных геометрических соображений.

Рассмотрим кривую второго порядка

$$y = \pm\sqrt{ax^2+bx+c} \quad \text{или} \quad y^2 = ax^2+bx+c.$$

Если взять на этой кривой произвольную точку (x_0, y_0), так что

$$y_0^2 = ax_0^2 + bx_0 + c, \tag{5}$$

го проходящая через нее секущая $y - y_0 = t(x - x_0)$ пересечет кривую еще только в одной точке (x, y). Координаты последней найдутся простым вычислением. Исключая y из уравнений кривой и секущей, олучим

$$[y_0 + t(x-x_0)]^2 = ax^2 + bx + c,$$

откуда, с учетом (5),

$$2y_0t(x-x_0) + t^2(x-x_0)^2 = a(x^2-x_0^2) + b(x-x_0)$$

или – по сокращении на $x - x_0$ –

$$2y_0t + t^2(x-x_0) = a(x+x_0) + b.$$

Таким образом, абсцисса x, а с нею и ордината y второй точки пересечения выражаются рациональными функциями от переменного углового коэффициента t. При этом очевидно, что, надлежаще изменяя t, можно заставить точку (x, y) описать всю кривую.

Теперь ясно, что зависимость

$$\sqrt{ax^2+bx+c} - y_0 = t(x-x_0)$$

и определит ту подстановку, которая заведомо рационализирует подынтегральное выражение в случае (4).

Пусть трехчлен ax^2+bx+c имеет вещественные корни λ и μ; это значит, что наша кривая пересекает ось x в точках $(\lambda, 0)$ и $(\mu, 0)$; взяв, например, первую из них за точку (x_0, y_0), придем к III подстановке Эйлера

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t(x-\lambda).$$

Если $c > 0$, то кривая пересекает ось y в точках $(0, \pm\sqrt{c})$; взяв одну из них за точку (x_0, y_0), получим II подстановку Эйлера

$$\sqrt{ax^2+bx+c} \pm \sqrt{c} = tx.$$

Наконец, в сущности, в том же порядке идей получается и I подстановка Эйлера, лишь за точку (x_0, y_0) мы принимаем бесконечно удаленную точку кривой. Именно, предполагая $a>0$ (в этом случае кривая будет гиперболой), рассмотрим асимптоту кривой $y=\pm\sqrt{a}x$ и станем пересекать кривую прямыми $y=t\pm\sqrt{a}x$, параллельными асимптоте (они будут проходить через упомянутую бесконечно удаленную точку). Каждая такая прямая пересекает кривую во второй точке (x, y), координаты которой будут рациональными функциями от t. Отсюда подстановка

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=t\pm\sqrt{a}x.$$

283. Примеры. Нам уже известны два основных интеграла [269, 9) и 12); **268**]:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|+C,$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C,$$

относящихся к рассматриваемому типу. Отправляясь от них, можно вычислить и другие интегралы.

1) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{\alpha x^2+\beta}}$. При вычислении этого интеграла будем различать два случая: $\alpha>0$ и $\alpha<0$.

Если $\alpha>0$, то интеграл легко преобразуется к первому из основных $\left(\text{при } \dfrac{\beta}{\alpha}=\pm a^2\right)$

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+\dfrac{\beta}{\alpha}}}=\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\ln\left|x+\sqrt{x^2+\frac{\beta}{\alpha}}\right|+C.$$

Можно еще умножить аргумент логарифма на α, что введет дополнительное слагаемое $\dfrac{1}{\sqrt{\alpha}}\ln\alpha$ и, следовательно, отразится лишь на C. Окончательно получим

$$\int\frac{dx}{\sqrt{\alpha x^2+\beta}}\underset{(\alpha>0)}{=}\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\ln\left|\alpha x+\sqrt{\alpha(\alpha x^2+\beta)}\right|+C'. \tag{6}$$

Если же $\alpha<0$, так что $\alpha=-|\alpha|$, радикал перепишем в виде $\sqrt{\beta-|\alpha|x^2}$. Для того чтобы радикал вообще мог иметь вещественные значения, необходимо предположить здесь $\beta>0$. Интеграл преобразуется ко второму из основных интегралов $\left(\text{при } \dfrac{\beta}{|\alpha|}=a^2\right)$, и

$$\int\frac{dx}{\sqrt{\alpha x^2+\beta}}\underset{(\alpha<0)}{=}\frac{1}{\sqrt{|\alpha|}}\arcsin\left(\sqrt{\frac{|\alpha|}{\beta}}\,x\right)+C. \tag{7}$$