NTNU
Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for fysikk

Faglig kontakt under eksamen: Prof. Morten Kildemo
Telefon: 73593211/93287744

EKSAMEN
FY1002 og TFY4160 BØLGEFYSIKK

Onsdag 12. desember 2012 kl. 0900 – 1300

Hjelpemidler: C
Typegodkjent kalkulator, med tomt minne, i samsvar med NTNUs regler. Trykte hjelpemidler: "Matematisk Formelsamling" (Rottmann), "Størrelser og Enheter i Fysikk og Teknikk," (O. Øgrim og B. E. Lian) eller "Fysiske Størrelser og Enheter," (C. Angell og B. E. Lian).

Evaluering/karaktersetting
Totalt antall poeng for skriftlig eksamen er 100. Disse vil være grunnlaget (med ev. små justeringer i vekt per oppgave) for evalueringen

Oppgave 1 [20p]

En stasjonær bølge på en streng er gitt av $D(x,t) = f(x)g(t)$ med generell løsning:

$$D(x,t) = A\cos(kx + \varphi_1)\cos(\omega t + \varphi_2) \tag{2}$$

a) [4p] For en streng med lengde L festet i begge ender, hva må φ_1 være. Vi velger fritt $\varphi_2 = 0$.

En metallstreng med lengde L = 180 cm er festet i begge ender (dvs knutepunkter der). Grunntonen (dvs laveste resonansfrekvens) og overtonene genereres av stående transversale bølger på strengen. Den skal stemmes slik at grunntonen er en E med frekvens f_1 = 41 Hz, tilsvarende en kontrabass. Strengen har sirkulært tverrsnitt med radius R = 2.00 mm og er laget av stål, med massetetthet ρ = 7800 kg/m^3.

b) [16p]

- Vis at svingefrekvensene til overtonene til metallstrengen er gitt som et heltall ganger grunn-tonen (dvs f_N=Nf_1, der N er et heltall).
- Bestem bølgelengden λ og bølgehastigheten v til 1. overtone (dvs nest laveste resonansfrekvens).
- Med hvor stor strekk-kraft S må strengen strammes?
- Skriv ned strengens utslag D(x,t), hvis N av strengen moder eksiteres samtidig.
- Hvis strengens generelle utslag ved t=0 var kjent, hvordan kan amplitudene til strengens moder for t>0 da bestemmes? (kort kvalitativt svar forventes)

Oppgave 2. [20p]

a) [6p] Gitt en linearpolarisert plan elektromagnetisk (EM) bølge som propagerer med bølgevektor $\mathbf{k}$. Lag en skisse som beskriver $\mathbf{E}(\rho,0)$ og $\mathbf{E}(\rho,t)$ for t<T der T er bølgens periode og $\rho = \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}\cdot\mathbf{r}$.

b) [9p] Hvilke hovedtyper polarisasjonstilstander kan man ha for en transversal bølge? En EM bølge er gitt som:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = E_1\cos(kz - \omega t)\,\hat{\mathbf{x}} + E_2\cos\left(kz - \omega t + \frac{\pi}{2}\right)\hat{\mathbf{y}}$$

Utled hvilken polarisasjons-tilstand dette er. Lag en figur som viser (spissen av) **E**(0,t) i x,y-planet, og angi dreieretning når en ser inn i strålen langs *z*-aksen (dvs: mot bølgens forplantningsretning). Angi det korresponderende **B**(0,t) feltet.

c) [5p] Lineærpolarisert lys kan observeres ved å se på blå himmel*. Forklar dette fenomenet ved hjelp av dipol-strålings modellen og en skisse.

* Litt mer presist, kan vi si at ved å observere blå himmel med polarisasjonsfilter ved 90 graders spredning ut fra sol-lysets retning, så observerer vi lineærpolarisert lys.

Oppgave 3. [15p]   Spesiell relativitets-teori

Et Kaon K^0 henfaller («decays») til 3 identiske pioner π^0 ($K^0 \rightarrow 3\pi^0$). Vi antar at hvert π^0 (pion) har den samme energien i hvilesystemet til K^0. Hvilesystemet til K^0 er altså inertialsystemet I, der K^0 er i ro.

a) Beregn farten v til π^0 i inertialsystemet *I*.

b) Hvis vi antar at ett av pionene har hastighet $\vec{\mathbf{v}} = v\hat{\mathbf{x}}$, beregn hastighetene til de to andre pionene i inertialsystemet *I*.

c) Den midlere levetiden til et π^0 er $8{,}4 \cdot 10^{-17}$ s i sitt hvilesystem (det vil si det inertialsystemet hvor pionet er i ro). Hva er den midlere avstand som π^0 kan tilbakelegge i inertialsystemet *I* (det vil si i hvilesystemet til K^0).

Gitt: $M_{\pi^0} = 135\, MeV/c^2$ og $M_{K^0} = 498\, MeV/c^2$

Oppgave 4. [15p] Refleksjon av bølger

To identiske strenger med forskjellig masse per lengdeenhet μ_1 og μ_2 er festet sammen ved x=0. Strengen er strekt langs x-aksen med strekk-kraft gitt av S. Du skal nå utlede uttrykket til refleksjonskoeffisienten (forholdet mellom reflektert amplitude og innkommende amplitude) ved skøyten, gitt at vi ser kun på transversale bølger på strengen.

a) [10p]

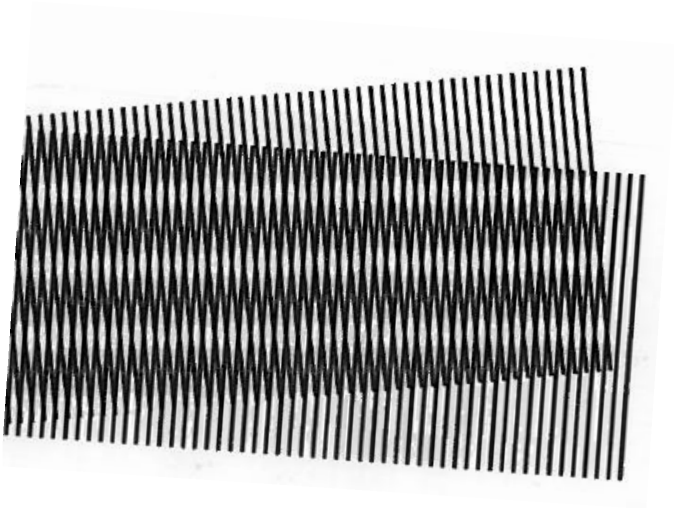
- Ved å definere en innkommende, reflektert og transmittert bølge, skriv ned bølgens totale utslag y(x,t) på hver side av skøyten.

- Grensebetingelsene er gitt av at både y og dy/dx må være kontinuerlige over skøyten. Utled refleksjonskoeffisienten (r) for bølgen ved hjelp av grensebetingelsene (det endelige svaret er gitt i appendiks).

b)[5p]

To stålstrenger (massetetthet ρ), med forskjellig diameter d_1=2 mm og d_2=1 mm er skøytet sammen. Finn tallverdien til refleksjonskoeffisienten fra skøyten (for den transversale bølgen). Beregn også reflektiviteten R ((forholdet mellom reflektert effekt og innkommende effekt), og transmisjonen T (forholdet mellom transmittert effekt og innkommende effekt).

Oppgave 5 [16p] Interferens mellom plane bølger



Figuren ovenfor viser et «Moiree» mønster som dannes grunnet interferens mellom to identiske plane bølger, men med forskjellig retningsvektorer $\hat{\mathbf{k}}_1$ og $\hat{\mathbf{k}}_2$, der θ er vinkelen mellom disse to.

a) [11p]

- Vis at summen av to identiske plane EM bølger (samme amplitude, bølgelengde, fase og polarisasjon), men med retning $\hat{\mathbf{k}}_1$ og $\hat{\mathbf{k}}_2$ gir det følgende uttrykket for interferensmønsteret til den tidsmidlere intensitet:

$$\left\langle I \right\rangle = 2I_0 \;\; 1+\cos \;\; \Delta\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} \qquad \text{, der } \Delta\mathbf{k} = \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1$$

Oppgitt: $\cos^2 z = \frac{1}{2} \;\; 1+\cos 2z \;\;$.

- For lys med bølgelengde 550 nm, og et interferens-stripemønster med romlig periode Λ =2 mm (Λ er avstand mellom interferens-stripene i figuren ovenfor), hvor stor er vinkelen mellom retningsvektorene $\hat{\mathbf{k}}_1$ og $\hat{\mathbf{k}}_2$ til de to EM plane bølgene. (Du kan trygt regne paraxialt/små vinkler i dette tilfellet, $\cos\theta \approx 1-\frac{1}{2}\theta^2; \sin\theta \approx \theta$. Oppgitt cosinus regelen for trekanter: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$.)

b) [5p]

Vi studerer det samme fenomenet for interferens mellom to plane trykkutsvingsbølger (lydtrykksbølger p($\mathbf{r}$,t)) med retning $\hat{\mathbf{k}}_1$ og $\hat{\mathbf{k}}_2$. Utled et tilsvarende uttrykk for den tidsmidlere intensitet som funksjon av trykkutsvingsamplituden (p_0) til hver av bølgene.

Oppgitt : $\varepsilon(x,t) = \rho v^2 \left(\frac{\partial \xi(x,t)}{\partial x}\right)^2$, $\left\langle I \right\rangle = \left\langle \varepsilon(x,t) \right\rangle v$ og $p(x,t) = -B\frac{\partial \xi}{\partial x}$.

Oppgave 6 [14p] Bølgepakker og dispersjon

For en generell bølgepakke satt sammen av en kontinuerlig fordeling av frekvenser rundt ω_0, finner man at fasehastigheten $v_\varphi = \frac{\omega}{k}$, og gruppehastigheten $v_g = \left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{\omega_0}$. Masse-fjær transmisjons-systemet studert i forelesningene, med masser m, festet med fjærer med fjærkonstant s, og endelig avstand d, har dispersjonsrelasjon:

$$\omega = \sqrt{\frac{4s}{m}} \sin \ kd/2$$

der k er bølgens bølgetall og vi ser kun på $\omega > 0$.

- Oppgi et eksakt uttrykk for fasehastigheten , og lag en skisse av denne for $0 \leq k \leq \frac{\pi}{d}$.

  Hva blir fasehastigheten for $kd \ll 1$. I hvilke tilfeller har vi dispersjon?
- Finn et uttrykk for gruppehastigheten v_g, og skisser denne for $0 \leq k \leq \frac{\pi}{d}$.
- Hva vil v_g=0 bety for dette masse-fjær systemet? Foreslå videre hva som skjer med bølgen for $\omega > \sqrt{\frac{4s}{m}}$.

Lykke til og god jul.

Formelsamling

Fete symboler angir vektorer. Symboler med hatt over angir enhetsvektorer. Formlenes gyldighet og symbolenes betydning antas å være kjent.

- Harmonisk plan bølge:

$$\xi(x,t) = \xi_0 \sin(kx - \omega t + \phi)$$
$$\xi(\boldsymbol{r},t) = \xi_0 \sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t + \phi)$$

- Bølgeligning:

$$\frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial t^2}$$
$$\nabla^2 \xi(\boldsymbol{r},t) \left(\equiv \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2}\right) = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \xi(\boldsymbol{r},t)}{\partial t^2}$$

- Fasehastighet:

$$v = \frac{\omega}{k}$$

- Gruppehastighet:

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}$$

- Generelt for ikkedispersive udempede bølger:

$$v = \sqrt{\frac{\text{elastisk modul}}{\text{massetetthet}}}$$

- Generelt for lineær respons i elastiske medier:

$$\text{mekanisk spenning} = \text{elastisk modul} \times \text{relativ tøyning}$$

- For transversale bølger på streng:

$$v = \sqrt{\frac{S}{\mu}}$$

- For longitudinale bølger i fluider:

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}}$$

- For longitudinale bølger i faste stoffer:

$$v = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}$$

- Middelverdi av harmonisk varierende størrelse $A(x,t)$, midlet over bølgelengde λ:

$$\overline{A} = \frac{\int_0^\lambda A(x,t)\,dx}{\int_0^\lambda dx} = \frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda A(x,t)\,dx$$

  Middelverdi av harmonisk varierende størrelse $A(x,t)$, midlet over periode T:

$$\langle A \rangle = \frac{\int_0^T A(x,t)\,dt}{\int_0^T dt} = \frac{1}{T}\int_0^T A(x,t)\,dt$$

- Midlere energi pr lengdeenhet for harmonisk bølge på streng:

$$\overline{\varepsilon} = \frac{1}{2}\mu\omega^2\xi_0^2$$

- Midlere energi pr volumenhet for harmonisk plan bølge:

$$\overline{\varepsilon} = \frac{1}{2}\rho\omega^2\xi_0^2$$

- Midlere effekt transportert med harmonisk bølge på streng:

$$\overline{P} = v\overline{\varepsilon} = \frac{1}{2}v\mu\omega^2\xi_0^2$$

- Intensitet i harmonisk plan bølge:

$$I = v\overline{\varepsilon} = \frac{1}{2}v\rho\omega^2\xi_0^2$$

- Midlere impulstetthet for harmonisk bølge:

$$\overline{\pi} = \frac{\overline{\varepsilon}}{v}$$

- Ideell gass:

$$pV = Nk_BT$$

- Varmekapasitet ved konstant trykk (Q = varme):

$$C_p = \left(\frac{dQ}{dT}\right)_p$$

- Varmekapasitet ved konstant volum (Q = varme):

$$C_V = \left(\frac{dQ}{dT}\right)_V$$

- Adiabatiske forhold (dvs ingen varmeutveksling):

$$pV^{\gamma} = \text{konstant}$$

- Adiabatkonstanten:

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V}$$

Gass med 1-atomige molekyler: $\gamma = 5/3$. Gass med 2-atomige molekyler: $\gamma = 7/5$.

- Bulkmodul for ideell gass ved adiabatiske forhold:

$$B = \gamma p$$

- Lydhastighet i gass (m = molekylmassen):

$$v = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma k_B T}{m}}$$

- Lydtrykk:

$$\Delta p = -B \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

- Lydnivå:

$$\beta(\text{dB}) = 10 \log \frac{I}{I_0}$$

med $I_0 = 10^{-12}$ W/m^2

- Dopplereffekt for lydbølger:

$$\nu_{\text{O}} = \frac{1 - v_{\text{O}}/v}{1 - v_{\text{S}}/v}\, \nu_{\text{S}}$$

- For sjokkbølger gjelder:

$$\sin \alpha = \frac{v}{v_{\text{S}}}$$

- Transversal bølge på streng med massetetthet μ_1 for $x < 0$ og μ_2 for $x > 0$, innkommende bølge propagerer i positiv x-retning:

  Amplitude for reflektert bølge:

  $$y_{r0} = \frac{\sqrt{\mu_1} - \sqrt{\mu_2}}{\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2}}\, y_{i0} = r y_{i0},$$

  der r er refleksjonskoeffisienten.

  Amplitude for transmittert bølge:

  $$y_{t0} = \frac{2\sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2}}\, y_{i0} = t y_{i0},$$

  der t er transmisjonskoeffisienten.

  Reflektivitet:

  $$R = \frac{\overline{P}_r}{\overline{P}_i}$$

  Transmisjon:

  $$T = \frac{\overline{P}_t}{\overline{P}_i}$$

- Plan lydbølge normalt inn mot grenseflate i $x = 0$ mellom to medier med elastiske moduler og massetettheter henholdsvis E_1, ρ_1 (for $x < 0$) og E_2, ρ_2 (for $x > 0$), innkommende bølge propagerer i positiv x-retning:

  Amplitude for reflektert bølge:

  $$\xi_{r0} = \frac{\sqrt{\rho_2 E_2} - \sqrt{\rho_1 E_1}}{\sqrt{\rho_2 E_2} + \sqrt{\rho_1 E_1}}\, \xi_{i0}$$

  Amplitude for transmittert bølge:

  $$\xi_{t0} = \frac{2\sqrt{\rho_1 E_1}}{\sqrt{\rho_2 E_2} + \sqrt{\rho_1 E_1}}\, \xi_{i0}$$

  Reflektivitet:

  $$R = \frac{\overline{P}_r}{\overline{P}_i}$$

  Transmisjon:

  $$T = \frac{\overline{P}_t}{\overline{P}_i}$$

- Maxwells ligninger på integralform:

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{A} = q/\varepsilon_0$$

$$\oint \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{A} = 0$$

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = -\frac{d}{dt} \int \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{A}$$

$$\oint \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{l} = \mu_0 I + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \int \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{A}$$

- Maxwells ligninger på differensialform:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \rho/\varepsilon_0$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$$

- Lorentzkraften:

$$\boldsymbol{F} = q\left(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}\right)$$

- Bølgeligning for $\boldsymbol{E}$ og $\boldsymbol{B}$ i vakuum:

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 \boldsymbol{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \boldsymbol{B}}{\partial t^2}$$

$$c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$$

- Energitetthet i elektromagnetisk felt:

$$u = u_E + u_B = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2$$

- Intensitet i elektromagnetisk bølge:

$$I = c\varepsilon_0 \overline{E^2} = c\varepsilon_0 \langle E^2 \rangle$$

- Poyntings vektor:

$$\boldsymbol{S} = \frac{1}{\mu_0} \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}$$

- Impuls i elektromagnetisk bølge:

$$\boldsymbol{\pi} = \mu_0 \varepsilon_0 \boldsymbol{S}$$

- Elektrisk dipolmoment:

$$\boldsymbol{p} = q\boldsymbol{d}$$

- Magnetisk dipolmoment:

$$\boldsymbol{m} = I\boldsymbol{A}$$

- Midlere utstrålt effekt fra oscillerende elektrisk dipol $p_0 \cos(\omega t)$:

$$\langle P \rangle = \frac{p_0^2 \omega^4}{12\pi\varepsilon_0 c^3}$$

- Midlere utstrålt effekt fra oscillerende magnetisk dipol $m_0 \cos(\omega t)$:

$$\langle P \rangle = \frac{\mu_0 m_0^2 \omega^4}{12\pi c^3}$$

- Malus' lov:

$$I(\theta) = I_0 \cos^2\theta$$

- Lineære medier:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{P} &= \varepsilon_0 \chi_e \boldsymbol{E} \\
\boldsymbol{D} &= \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P} = \varepsilon_0(1+\chi_e)\boldsymbol{E} = \varepsilon_0\varepsilon_r\boldsymbol{E} = \varepsilon\boldsymbol{E} \\
\boldsymbol{M} &= \chi_m \boldsymbol{H} \\
\boldsymbol{B} &= \mu_0\boldsymbol{H} + \boldsymbol{M} = \mu_0(1+\chi_m)\boldsymbol{H} = \mu_0\mu_r\boldsymbol{H} = \mu\boldsymbol{H} \\
\oint \boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{A} &= q_{\text{fri}} \\
\oint \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{A} &= 0 \\
\oint \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l} &= -\frac{d}{dt}\int \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{A} \\
\oint \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{l} &= I_{\text{fri}} + \frac{d}{dt}\int \boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{A} \\
\nabla\cdot\boldsymbol{D} &= \rho_{\text{fri}} \\
\nabla\cdot\boldsymbol{B} &= 0 \\
\nabla\times\boldsymbol{E} &= -\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} \\
\nabla\times\boldsymbol{H} &= \boldsymbol{j}_{\text{fri}} + \frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t} \\
u &= \frac{1}{2}\varepsilon E^2 + \frac{1}{2\mu}B^2 \\
\boldsymbol{S} &= \frac{1}{\mu}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}
\end{aligned}$$

- For elektromagnetiske bølger i medier ($q_{\rm fri} = I_{\rm fri} = 0$):

$$\begin{aligned}\nabla^2 \boldsymbol{E} &= \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} \\ \nabla^2 \boldsymbol{B} &= \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{B}}{\partial t^2} \\ v &= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}} = \frac{c}{n}\end{aligned}$$

- Grenseflatebetingelser ($q_{\rm fri} = I_{\rm fri} = 0$ i grenseflaten):

$$\begin{aligned}\Delta D_\perp &= 0 \\ \Delta E_\parallel &= 0 \\ \Delta B_\perp &= 0 \\ \Delta H_\parallel &= 0\end{aligned}$$

- Refleksjon og brytning:

$$\theta_r = \theta_i$$

$$n_1 \sin\theta_i = n_2 \sin\theta_t$$

- Youngs eksperiment med to smale spalter:

$$I(\theta) = 4I_0 \cos^2\left(\frac{\pi d}{\lambda}\sin\theta\right)$$

- Diffraksjonsgitter med N smale spalter:

$$I(\theta) = I_0\, \frac{\sin^2\left(\frac{N\pi d}{\lambda}\sin\theta\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi d}{\lambda}\sin\theta\right)}$$

- Diffraksjon fra en spalte:

$$I(\theta) = I(0)\, \frac{\sin^2\left(\frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta\right)}{\left(\frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta\right)^2}$$

- Diffraksjon fra N spalter, spaltebredde a, spalteavstand d:

$$I(\theta) = \hat{I}\, \frac{\sin^2\left(\frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta\right)}{\left(\frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta\right)^2} \cdot \frac{\sin^2\left(\frac{N\pi d}{\lambda}\sin\theta\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi d}{\lambda}\sin\theta\right)}$$

- Lorentzfaktor:

$$\gamma = \left(1 - v^2/c^2\right)^{-1/2}$$

- Lorentztransformasjonene ($\overline{S}$ har hastighet $\boldsymbol{v} = v\hat{x}$ i forhold til S):

$$\begin{aligned} \overline{x} &= \gamma\,(x - vt) \\ \overline{y} &= y \\ \overline{z} &= z \\ \overline{t} &= \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= \gamma\,(\overline{x} + v\overline{t}) \\ y &= \overline{y} \\ z &= \overline{z} \\ t &= \gamma\left(\overline{t} + \frac{v}{c^2}\overline{x}\right) \end{aligned}$$

- Tidsdilatasjon:

$$\Delta t = \gamma \Delta \overline{t}$$

- Lengdekontraksjon:

$$\Delta \overline{x} = \gamma \Delta x$$

- Hastighet i S ($\boldsymbol{u} = u_x\hat{x} + u_y\hat{y} + u_z\hat{z}$):

$$u_x = dx/dt$$

$$u_y = dy/dt$$

$$u_z = dz/dt$$

  Hastighet i $\overline{S}$ ($\overline{\boldsymbol{u}} = \overline{u}_x\hat{x} + \overline{u}_y\hat{y} + \overline{u}_z\hat{z}$):

$$\overline{u}_x = d\overline{x}/d\overline{t}$$

$$\overline{u}_y = d\overline{y}/d\overline{t}$$

$$\overline{u}_z = d\overline{z}/d\overline{t}$$

- Addisjon av hastigheter (alle hastigheter i samme retning):

$$v_{AC} = \frac{v_{AB} + v_{BC}}{1 + v_{AB}v_{BC}/c^2}$$

- Dopplereffekt for elektromagnetiske bølger:

$$\overline{\nu} = \nu \left(\frac{c - v}{c + v}\right)^{1/2}$$

Vedlegg til formelsamling TFY4160/Fy1002 2012

- Relativistisk impuls:

$$\boldsymbol{p} = \gamma m \boldsymbol{v}$$

- Energi (partikkel med masse m):

$$\begin{aligned} E &= \gamma m c^2 \\ E_0 &= m c^2 \\ E_k &= E - E_0 \\ E^2 &= (pc)^2 + \left(mc^2\right)^2 \end{aligned}$$