Grâce à l'invariance de jauge de la mesure, de l'action et de Δ, on peut écrire $\mathcal{D}X = \mathcal{D}^g X$, $S({}^g X) = S(X)$ et $\Delta({}^g X) = \Delta(X)$, ce qui permet de récrire

$$Z = \int_{\mathcal{G}} dg \int \mathcal{D}^g X \Delta({}^g X) \delta(\mathcal{F}({}^g X)) e^{iS({}^g X)}, \tag{2.38}$$

et en redéfinissant $Y = {}^g X$, on a

$$Z = \left(\int_{\mathcal{G}} dg \right) \int \mathcal{D}Y \Delta(Y) \delta(\mathcal{F}(Y)) e^{iS(Y)}. \tag{2.39}$$

Ceci montre que la quantité

$$Z^G = \int \mathcal{D}Y \Delta(Y) \delta(\mathcal{F}(Y)) e^{iS(Y)}, \tag{2.40}$$

correspond bien à Z divisé par le volume du groupe de jauge $\int_{\mathcal{G}} dg$. La mesure $\Delta(X)\delta(\mathcal{F}(X))\mathcal{D}X$ permet bien de fixer de jauge de manière invariante dans la fonction de partition.

D'une manière générale, la méthode de Fadeev-Popov permet donc de fixer de jauge les intégrales de chemin. Dans le cas d'un système totalement contraint, on s'attend donc également à devoir user de cette méthode pour fixer de jauge les intégrales de chemin qui définissent les éléments de matrice de l'opérateur de projection. Nous allons étudier ceci dans l'exemple de la particule relativiste exposé dans la partie suivante.

2.3 Exemple d'un système totalement contraint : la particule libre relativiste

La particule relativiste peut être formulée sous la forme d'un système totalement contraint. En ce sens il s'agit du système totalement contraint le plus simple, qu'on peut voir comme de la relativité générale en dimension 0+1. Je vais maintenant illustrer les idées des deux parties précédentes sur cet exemple, c'est à dire montrer comment développer le formalisme canonique et obtenir le projecteur sur les états physiques dans ce cadre. Dans une seconde partie je montrerai comment ce projecteur peut aussi s'obtenir dans un formalisme d'intégrale de chemin.

2.3.1 Particule libre classique et canonique

On considère l'action suivante pour la particule libre relativiste

$$S[x^\mu, N] = \int_0^1 d\tau \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \eta_{\mu\nu}}{N(\tau)} - m^2 N(\tau) \right), \tag{2.41}$$

où τ joue le rôle de temps propre non-physique, x^μ est le quadrivecteur position de la particule. N peut être vu comme une métrique unidimensionelle g_{00}, qui joue le rôle du "lapse" de la formulation canonique de la relativité générale. Les équations du mouvement de cette action sont

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\dot{x}}{N}\right) &= 0, && (2.42) \\ \left(\frac{\dot{x}}{N}\right)^2 + m^2 &= 0. && (2.43) \end{aligned}$$

Cette action possède une invariance de jauge par reparametrisation du temps $\tau \rightarrow f(\tau)$ (difféomorphisme)

$$\begin{aligned} x(\tau) &\rightarrow x(f(\tau)), & (2.44)\\ N(\tau) &\rightarrow \frac{df}{d\tau} N(f(\tau)), & (2.45) \end{aligned}$$

pour f différentiable et préservant les points extrèmes. Dans la jauge $\tau = x^0 = t$, la seconde équation permet d'extraire $N = \sqrt{1-v^2}/m$, et la première équation devient

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mv}{\sqrt{1-v^2}}\right) = 0, \tag{2.46}$$

qui est bien l'équation du mouvement de la particule libre relativiste.

Le moment conjugué à x^μ est donné par

$$p_\mu = \frac{\eta_{\mu\nu}\dot{x}^\nu}{N} \tag{2.47}$$

et le hamiltonien s'écrit alors

$$H(x,p,N) = \int d\tau N(p^2+m^2) \tag{2.48}$$

où le lapse N joue le rôle de multiplicateur de Lagrange pour la contrainte

$$C(p) = p^2 + m^2. \tag{2.49}$$

De manière analogue au cas de la relativité générale, c'est un système totalement contraint puisque le hamiltonien est nul quand la contrainte est satisfaite. La contrainte hamiltonienne $C(p)$ engendre la symétrie de jauge par reparamétrisation du temps

2.3.2 Quantification canonique

Le choix naturel de polarisation amène à considérer l'espace de Hilbert des fonctions d'ondes $< x^\mu|\Psi >= \Psi(x^\mu)$, muni du produit scalaire $\mathcal{L}^2$. La représentation de p_μ par les opérateurs de dérivation conduit à l'équation de contrainte

$$(\Box + m^2)\Psi = 0, \tag{2.50}$$

où $\Box$ désigne l'opérateur d'alembertien. Les solutions de cette équation d'onde forment l'espace de Hilbert physique. Pour trouver le produit scalaire physique, l'opérateur de projection

$$\hat{\Pi} = \delta(P^2 + m^2) \tag{2.51}$$

possède des éléments de matrice

$$\begin{aligned} < x_f|\hat{\Pi}|x_i > &= \int d^4p < x_i|p > \delta(p^2+m^2) < p|x_f >, \\ &= \int d^4p \; e^{ip\cdot(x_f - x_i)}\delta(p^2+m^2). \end{aligned} \tag{2.52}$$